

6. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Daniel Bielefeld

05.06.2008

Aufgabe 1. Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ komplexwertige Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\det(\mathbf{I}_m + \mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}\mathbf{A}),$$

wobei \mathbf{I}_m und \mathbf{I}_n jeweils die $m \times m$ - bzw. $n \times n$ -Einheitsmatrizen sind.

Hinweis: Für die Determinante einer $(m+n) \times (m+n)$ Matrix \mathbf{H} mit

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{C}^{n \times m}, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

gilt

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{C}) \cdot \det(\mathbf{F} - \mathbf{E}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}).$$

Aufgabe 2. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit vier Empfangsantennen und drei Sendantennen. Die Leistungsbeschränkung betrage $L = 32$. Für die additive Störung gelte $\mathbf{Z} \sim \text{SCN}(\mathbf{0}, 110 \cdot \mathbf{I}_4)$. Die Kanalmatrix \mathbf{H} sei

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Kapazität des Kanals (bzgl. ln).
- Geben Sie die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} an, so dass für die Eingabe $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ die Kapazität des Kanals angenommen wird.

Aufgabe 3. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit einer Empfangsantenne, zwei Sendantennen und mit Ausgabe $Y = H(X_1, X_2)' + Z$. Für die Pfadgewinne h_{11}, h_{12} gelte $h_{11}, h_{12} \sim \text{SCN}(0, \sigma^2)$ stochastisch unabhängig mit $\sigma^2 > 0$. Die Sendeleistung werde auf beide Antennen gleichmäßig aufgeteilt.

Bestimmen Sie einen eindimensionalen Kanal mit Ausgabe $\tilde{Y} = h\tilde{X} + Z$ mit gleicher Gesamtsendeleistung, der äquivalent ist, d.h. dass gilt $Y \sim \tilde{Y}$. Welche Verteilung besitzt h ?