RWTH AACHEN UNIVERSITY

Lehrstuhl für Theoretische Informationstechnik

7. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Daniel Bielefeld

13.06.2008

Aufgabe 1. Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ eine positiv definite hermitsche Matrix. Zeigen Sie

$$|\boldsymbol{A}| \le \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Das ist die Hadamard Ungleichung.
Hinweis: Definieren Sie einen Zufallsvektor $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{A})$ und verwenden Sie die Eigenschaft $\mathrm{H}(Y|Z) \le \mathrm{H}(Y)$ der differentiellen Entropie und die Kettenregel

$$\mathrm{H}(Y_1,\dots,Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(Y_i|Y_1,\dots,Y_{i-1}).$$

Aufgabe 2. Gegeben sei der parallele Gaußkanal

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{W}, \quad \boldsymbol{W} \sim \mathrm{N}_2\left(\boldsymbol{0}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{E}[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}] \le 2.$$

In Übung 5, Aufgabe 3, haben wir die Kapazität dieses Kanals bestimmt zu $C = \log(3)/2$. Der Eingang $\boldsymbol{X}$ habe im Folgenden die kapazitätserreichenden Verteilung

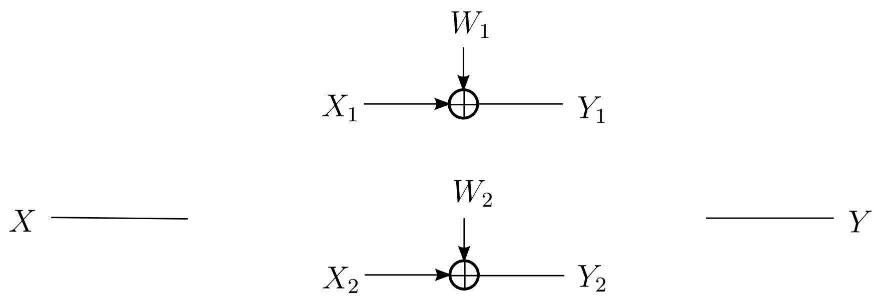
$$\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_2\left(\boldsymbol{0}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Sie sollen nun einen äquivalenten einfachen Gaußkanal herleiten. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie: Es gibt ein $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, so dass $\boldsymbol{X} \sim (1,-1)'X$.

(b) Zeigen Sie: Für $Y = (1,-1)\boldsymbol{Y}$ und X aus (a) gilt $I(X,Y) = \log(3)/2$.

(c) Vervollständigen Sie nun das Diagramm:



Aufgabe 3. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit einer Empfangsantenne, drei Sendeantennen und Leistungsbeschränkung $L = 20$. Für die additive Störung gelte $Z \sim \mathrm{SCN}(0, 42)$. Die Pfadgewinne seien $h_{11} = 5$, $h_{12} = 1$ und $h_{13} = 4$.

(a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.

(b) Wie lautet die Spektralzerlegung von $\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}$?

(c) Geben Sie die Inputverteilung an, für die die Kapazität angenommen wird.