11. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Daniel Bielefeld

11.07.2008

Aufgabe 1. Beweisen Sie Proposition 5.3.2 der Vorlesung:
Es sei $\mathcal{S}_{min} = \{i \in \mathcal{S} \mid f(i) \leq f(j) \;\; \forall j \in \mathcal{S}\}$ die Menge der Zustände minimaler Energie. Dann gilt:

(a)

$$\lim_{T\to 0} \frac{1}{Z(T)} \exp\left(-\frac{f(i)}{k_B T}\right) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{S}_{min}|} & , \quad i \in \mathcal{S}_{min} \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$\lim_{T\to \infty} \frac{1}{Z(T)} \exp\left(-\frac{f(i)}{k_B T}\right) \quad = \quad \frac{1}{|\mathcal{S}|} \quad , \quad i \in \mathcal{S}.$$

Aufgabe 2. Die homogene Markov-Kette $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ besitze die Übergangsmatrix

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

a) Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen der Markov-Kette.

b) Betrachten Sie die Anfangsverteilung $\boldsymbol{p}(0) = (1, 0, 0)$. Berechnen Sie $\boldsymbol{p}(1)$ und $\boldsymbol{p}(2)$.

c) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette.