2. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

29.04.2010

Aufgabe 1.

a) Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}).$$

b) Es sei $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Zufallsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}(\operatorname{tr}(\mathbf{X})) = \operatorname{tr}(\mathrm{E}(\mathbf{X})).$$

Aufgabe 2. Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen zwei reellwertigen, absolut-stetigen Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f bzw. g ist gegeben durch

$$\mathrm{D}(f||g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz für die Dichten von

a) $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$

b) $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$.

Ist die Kullback-Leibler-Distanz *symmetrisch*, d.h. gilt $\mathrm{D}(f||g) = \mathrm{D}(g||f)$?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie $\mathrm{I}(X, Y)$, $\mathrm{H}(X|Y)$, und $\mathrm{H}(Y|X)$ für

$$(X, Y) \sim \mathrm{N}_2 \left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

mit $-1 < \rho < 1$.