Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Andreas Bollig

18.08.2011

TI I: Aufgabe 1-4
TI II: Aufgabe 5-8

Aufgabe 1. Gegeben seien drei Radarstationen, die gleichzeitig aber unabhängig zur Detektion von Flugzeugen genutzt werden sollen. Die Wahrscheinlichkeiten, dass ein vorbeifliegendes Flugzeug von den einzelnen Radarstationen korrekt detektiert wird, betragen $P_1 = 0.9$, $P_2 = 0.8$ und $P_3 = 0.7$.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Radarstationen die Anwesenheit eines Flugzeugs korrekt detektieren?

b) Es kann zu zufälligen Ausfällen der Stationen kommen, bei denen kein Detektionsergebnis vorliegt. Diese Ausfälle treten bei allen Stationen unabhängig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Es liege die Entscheidung nur einer Radarstation vor, welche die Anwesenheit eines Flugzeugs korrekt detektiert hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um die Entscheidung der ersten Radarstation?

c) Nun sei genau eine der Radarstationen durch einen Ausfall betroffen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den beiden übrigen Stationen eine die Anwesenheit eines Flugzeugs korrekt detektiert und die andere das Flugzeug nicht detektiert, wenn nicht bekannt ist, welche Station ausgefallen ist?

Aufgabe 2. Gegeben sei ein normalverteilter Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ mit Erwartungswert $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$ und Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

wobei $0 \leq |\rho| < 1$.

Außerdem sei ein weiterer Zufallsvektor $\mathbf{Y}$ gegeben durch

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$$

wobei $\mathbf{A}$ eine orthogonale Matrix ist.

a) Bestimmen Sie die Verteilungsdichtefunktion von $\mathbf{Y}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\mu}$, und $\mathbf{C}$.

Nun seien die folgenden Zufallsvariablen gegeben:

$$Z = X_1^2 + X_2^2$$
$$\Phi = \measuredangle\left(X_1, X_2\right), \quad \Phi \in [0, 2\pi).$$

Von nun an gelte $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$.

b) Berechnen Sie die gemeinsame Verteilungsdichtefunktion von Z und Φ.

c) Geben Sie das ρ in $\mathbf{C}$ an, für das Z und Φ stochastisch unabhängig sind. Bestimmen Sie für diesen Fall die Verteilungsfunktion von Z.

Aufgabe 3. Gegeben seien eine binäre gedächtnislose Quelle X mit dem Quellalphabet $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ und den Symbolwahrscheinlichkeiten $P(X = 0) = 0.1$ und $P(X = 1) = 0.9$, sowie ein binärer symmetrischer Kanal (BSC) mit Kanalfehlerwahrscheinlichkeit $\varepsilon = 0.2$.

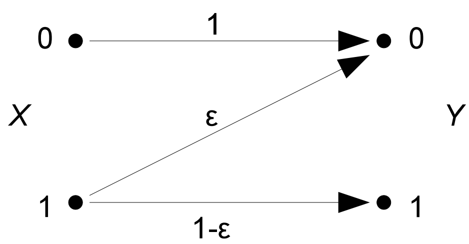
a) Bestimmen Sie die Entropie der Quelle X bzgl. $\log_2$.

b) Konstruieren Sie einen binären Huffman-Kode für Blöcke aus je drei Quellsymbolen.

c) Bestimmen Sie die erwartete Blockfehlerwahrscheinlichkeit P_e nach Übertragung der unkodierten Blöcke über den BSC, wobei ein Block genau dann korrekt übertragen wird, wenn alle Bits des Blocks korrekt übertragen werden.

d) Bestimmen Sie nun die erwartete Blockfehlerwahrscheinlichkeit P_e^K nach Übertragung der wie in b) kodierten Blöcke über den BSC, wobei ein kodierter Block genau dann korrekt übertragen wird, wenn alle Bits des kodierten Blocks korrekt übertragen werden.

Aufgabe 4. Gegeben sei folgender binärer Kanal (Z-Kanal):



$$P(X = 0) = q$$
$$P(X = 1) = 1 - q.$$

a) Berechnen Sie die Transinformation zwischen X und Y in Abhängigkeit von q und ϵ.

b) Berechnen Sie für den Fall $\epsilon = 0.5$ die kapazitätserreichende Eingangsverteilung und die Kapazität in *bit/Kanalnutzung*.

c) Wie groß ist die Kapazität im Fall $\epsilon = 1$? Kommentieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 5. Gegeben sei ein Fading-Kanal mit dem Ausgangssignal

$$Y = H \cdot X + Z.$$

Hier repräsentiert H den Kanal. Der Kanal H sei reell und kann nur zwei Werte annehmen: $H \in \{\sqrt{0.5}, \sqrt{1.5}\}$. Beide Werte werden mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen, d.h. $P(H = \sqrt{0.5}) = P(H = \sqrt{1.5}) = 0.5$. Des Weiteren sei X das reellwertige Eingangssignal, das folgender Leistungsbeschränkung unterliege:

$$\mathrm{E}(X^2) \leq 1.$$

Die Kanalrealisierung H und das Eingangssignal X sind stochastisch unabhängig. Schließlich ist Z additives weißes Gaußsches Rauschen mit $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Ungleichung gilt:

$$\mathrm{I}((Y, H), X) \geq \mathrm{I}(Y, X).$$

Dies bedeutet, dass die Transinformation zwischen Sender und Empfänger größer ist, wenn der Empfänger die Kanalrealisierung kennt.

b) Berechnen Sie die Kapazität für den Fall, dass der Empfänger den Kanal kennt (bzgl. ln).

Nun seien H und X nicht mehr notwendigerweise stochastisch unabhängig.

c) Jetzt sei neben dem Empfänger auch dem Sender die Realisierung des Kanals bekannt. Somit kann der Sender die Sendeleistung an die Kanalrealisierung anpassen.

Zur Bestimmung der optimalen Sendeleistung kann man diese Situation als einen parallelen Gaußkanal mit zwei Kanälen (Kanal 1 und Kanal 2) modellieren. Kanalnutzungen bei der Kanalrealisierung $H = \sqrt{0.5}$ korrespondieren dann zu Nutzungen von Kanal 1, wohingegen Kanalnutzungen bei der Kanalrealisierung $H = \sqrt{1.5}$ zu Nutzungen von Kanal 2 korrespondieren.

Berechnen Sie die Kapazität des Kanals in diesem Fall (bzgl. ln). Sind in diesem Fall die Kanalrealisierung H und das Eingangssignal X stochastisch unabhängig?

Aufgabe 6. Für ein Mobilfunksystem sollen zwei Kanäle mit additivem Gaußschen Rauschen zur parallelen Nutzung mit einer gemeinsamen Leistungsbeschränkung von $L = 5$ gebündelt werden. Die additive Störung sei durch einen zweidimensional normalverteilten Zufallsvektor $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2)'$ mit $\mathrm{E}(\boldsymbol{Z}) = (0, 0)'$ und folgender Dichte beschrieben:

$$f_{\boldsymbol{Z}}(z_1, z_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(z_1^2 - z_1 z_2 + z_2^2)}$$

a) Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage „Die Störungen Z_1 und Z_2 sind stochastisch unabhängig".

b) Berechnen Sie die Kapazität des gebündelten Kanals (bzgl. ln).

c) Geben Sie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ an, für welche die Eingabe $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$ die Kapazität des Kanals erreicht.

Aufgabe 7. Gegeben sei ein komplexer MIMO-Kanal $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$ mit Leistungsbeschränkung $L = 6$. Für die additive Störung gelte $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, 16\,\mathbf{I}_3)$. Die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ sei

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Anzahl der Sende- und Empfangsantennen an.

b) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals (bzgl. ln).

c) Geben Sie eine Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ an, so dass für die Eingabe $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$ die Kapazität des Kanals angenommen wird.

Aufgabe 8. Eine Firma beabsichtigt, ein Rechenzentrum zu bauen. Dafür stehen zwei verschiedene Servertypen zur Auswahl, die verschieden leistungsfähig sind und verschiedene Kosten verursachen, siehe Tabelle.

Typ	A	B
Kosten [*Euro pro Zeiteinheit*]	10000	5000
Geschwindigkeit [*maximal mögliche Anfragen pro Sekunde*]	1000	600

Des Weiteren sind folgende Randbedingungen zu beachten:

- Insgesamt müssen die Server in der Lage sein, mindestens 5000 Anfragen pro Sekunde zu verarbeiten.
- In dem Rechenzentrum ist Platz für maximal 8 Server. Der Typ spielt hierfür keine Rolle.
- Da Servertyp A eine geringere Latenz besitzt, die für bestimmte Anfragen benötigt wird, sind mindestens 2 Server vom Typ A notwendig.

Die Server sollen nun so ausgewählt werden, dass alle Bedingungen erfüllt werden und die Kosten minimiert werden.

a) Formulieren Sie das zugehörige Optimierungsproblem in kanonischer Form.

b) Lösen Sie das Optimierungsproblem grafisch. Geben Sie außerdem die minimalen Kosten an.