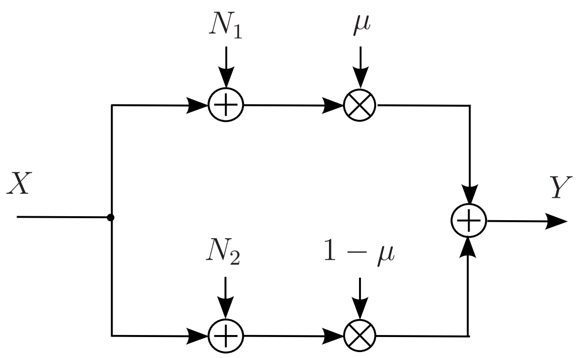
4. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

05.05.2011

Aufgabe 1. Gegeben sei der folgende reellwertige Kanal:



Das Eingangssignal X unterliege der Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}(X^2) \leq 4$ und habe den Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = 0$. Die additiven Rauschterme N_1 und N_2 seien normalverteilt mit $N_1 \sim \mathrm{N}(0, 1)$ und $N_2 \sim \mathrm{N}(0, 2)$. Das Eingangssignal X und die beiden Rauschterme N_1 und N_2 seien gemeinsam stochastisch unabhängig. Für den Parameter μ gelte $0 \leq \mu \leq 1$. Die Zufallsvariable Y repräsentiere das Ausgangssignal.

Hinweis: Verwenden Sie für die gesamte Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

a) Sei $\mu = 1$. Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.

b) Der Parameter μ liege wieder im Intervall $[0, 1]$. Berechnen Sie die Kapazität in Abhängigkeit von μ.

c) Für welchen Wert von μ ist die Kapazität maximal? Wie groß ist die maximale Kapazität des Kanals?

Aufgabe 2. Im WLAN-Standard (802.11g) stehen dem Benutzer 27,83 MHz Übertragungsbandbreite pro Kanal zur Verfügung. Laut Standard kann ab einem SNR von 50 dB am Empfänger die maximale Bruttoübertragungsrate von 54 Mbit/s erzielt werden.

Bestimmen Sie im Vergleich dazu die maximale theoretische Übertragungsrate über einen bandbegrenzten Gaußkanal bei gleichem SNR.

Aufgabe 3. Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ eine positiv definite hermitsche Matrix. Zeigen Sie

$$|\boldsymbol{A}| \le \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Das ist die Hadamard Ungleichung.
Hinweis: Definieren Sie einen Zufallsvektor $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{A})$ und verwenden Sie die Eigenschaft $\mathrm{H}(Y|Z) \le \mathrm{H}(Y)$ der differentiellen Entropie und die Kettenregel

$$\mathrm{H}(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(Y_i|Y_1, \ldots, Y_{i-1}).$$