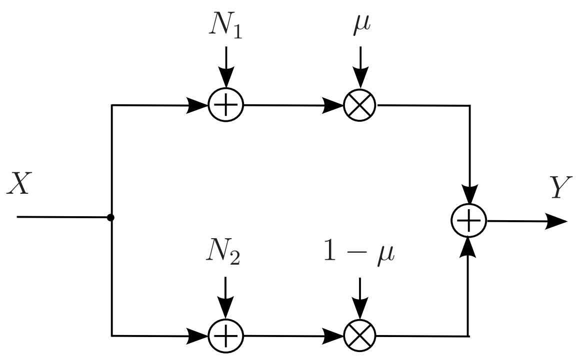
4. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Anke Schmeink, Martijn Arts, Andreas Bollig, Christoph Schmitz

03.05.2012

Aufgabe 1. Gegeben sei der folgende reellwertige Kanal:



Das Eingangssignal X unterliege der Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}(X^2) \leq 4$ und habe den Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = 0$. Die additiven Rauschterme N_1 und N_2 seien normalverteilt mit $N_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $N_2 \sim \mathrm{N}(0,2)$. Das Eingangssignal X und die beiden Rauschterme N_1 und N_2 seien gemeinsam stochastisch unabhängig. Für den Parameter μ gelte $0 \leq \mu \leq 1$. Die Zufallsvariable Y repräsentiere das Ausgangssignal.

Hinweis: Verwenden Sie für die gesamte Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

a) Sei $\mu = 1$. Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.

b) Der Parameter μ liege wieder im Intervall $[0,1]$. Berechnen Sie die Kapazität in Abhängigkeit von μ.

c) Für welchen Wert von μ ist die Kapazität maximal? Wie groß ist die maximale Kapazität des Kanals?

Aufgabe 2. Im WLAN-Standard (802.11g) stehen dem Benutzer 20 MHz Übertragungsbandbreite pro Kanal zur Verfügung. Laut Standard kann ab einem SNR von 50 dB am Empfänger die maximale Bruttoübertragungsrate von 54 Mbit/s erzielt werden.

Bestimmen Sie im Vergleich dazu die maximale theoretische Übertragungsrate über einen bandbegrenzten Gaußkanal bei gleichem SNR.

Aufgabe 3. In dieser Aufgabe werden wichtige Grundlagen zur Diagonalisierung von Matrizen behandelt bzw. wiederholt.

a) Eine komplexwertige quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt hermitesch, wenn $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$ gilt. Zeigen Sie, dass sämtliche Eigenwerte einer hermiteschen Matrix reell sind. Gilt dies auch für reelle symmetrische Matrizen?

b) Eine komplexwertige quadratische Matrix $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt unitär, wenn $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}^{-1}$ gilt. Jede hermitesche Matrix $\mathbf{A}$ ist unitär diagonalisierbar, d.h. es existiert eine unitäre Matrix $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, sodass

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \boldsymbol{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

eine Diagonalmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ mit den Eigenwerten von $\mathbf{A}$ ist.

Zeigen Sie nun die Gültigkeit von

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,.$$