5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Anke Schmeink, Martijn Arts, Andreas Bollig, Christoph Schmitz

10.05.2012

Aufgabe 1. Für die Datenübertragung von einem Server zu einem Clientrechner stehen drei parallele Leitungen zur Verfügung. Da die Leitungen in einem Kabelkanal verlegt sind, ist das normalverteilte additive Rauschen $\mathbf{Z}$ auf den Leitungen korreliert und besitzt die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{\Sigma_Z} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 23 & -1 & -10 \\ -1 & 23 & -10 \\ -10 & -10 & 32 \end{pmatrix}.$$

Der Server kann mit einer maximalen Sendeleistung L senden, wobei die Leistung beliebig auf die Leitungen verteilt werden kann.

a) Wie groß ist die Kapazität des Kanals für $L \in \{6, 8\}$ bestehend aus den drei Leitungen?

b) Für welche Inputverteilungen werden die Kapazitäten aus **a)** angenommen?

c) Betrachten Sie die Leitungen nun als drei unabhängige reelle Gaußkanäle mit Leistungsbeschränkung $L' = 2$ auf jeder Leitung. Wie groß ist die Gesamtkapazität für den Fall, dass

- die Korrelationen zwischen den Kanälen vernachlässigt werden, bzw.
- die Rauschleistungen durch die Eigenwerte der Kovarianzmatrix gegeben sind.

Aufgabe 2. Gegeben sei ein reeller paralleler Gauß-Kanal

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}.$$

Das Eingangssignal $\mathbf{X}$ unterliegt der Leistungsbeschränkung $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma_X}) \le P$. Für die Kovarianzmatrix des normalverteilten, mittelwertfreien Störterms $\mathbf{Z}$ gelte weiterhin

$$\mathbf{\Sigma_Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und erklären Sie das Ergebnis.

b) Es soll auf der Empfangsseite des Kanals ein Vektor $\mathbf{b}$ derart konstruiert werden, so dass die Komponente X_1 fehlerfrei übertragen wird. Finden Sie hierfür eine geeignete lineare Transformation

$$\mathbf{b}'\mathbf{Y} = \mathbf{b}'(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) \ , \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, .$$

Warum ist eine fehlerfreie Übertragung möglich?

Hinweis: Berechnen Sie $\mathbf{b}$ so, dass die Varianz von $W = \mathbf{b}'\mathbf{Z}$ gleich Null ist.