

11. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Anke Schmeink, Martijn Arts, Andreas Bollig, Christoph Schmitz
12.07.2012

Aufgabe 1.

a) Ein lineares, zeitdiskretes SISO-System werde durch die Beziehung

$$y(t) = \sum_{i=0}^t h_i u(t-i)$$

beschrieben, wobei $t \in \mathbb{Z}$ ist. Für die weiteren Größen gilt:

- Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ mit $u(t) = 0$ für $t < 0$
- Ausgangssignal $y(t) \in \mathbb{R}$
- FIR Kanalkoeffizienten $h_i \in \mathbb{R}$ (bekannt) mit $h_i = 0$ für $i > N$

Geben Sie für die Abtastzeitpunkte $0 \leq t \leq N$ die Beziehung zwischen Ein- und Ausgangssignal in einer kompakten Matrix-Vektorschreibweise an.

b) Das Ausgangssignal $y(t)$ soll nun näherungsweise einem vorgegebenen Signal $y_{\text{ziel}}(t)$ folgen können. Hierfür ist die betragsmäßig maximale Abweichung der Differenz $e(t) = y(t) - y_{\text{ziel}}(t)$ für die Zeitpunkte $0 \leq t \leq N$ möglichst klein zu halten

$$\max_{0 \leq t \leq N} |e(t)| \rightarrow \min.$$

Um dieses Ziel zu erreichen, soll jetzt eine Steuerung für das Eingangssignal $u(t)$ entworfen werden. Dabei sind die folgenden technischen Spezifikationen zu beachten.

- Das Eingangssignal darf nur für die Zeitpunkte $0 \leq t \leq M$ gesteuert werden. Für Zeitpunkte $M < t \leq N$ muss das Eingangssignal Null sein.
- Die betragsmäßig maximale Amplitude des Eingangssignals darf den Wert U nicht überschreiten.
- Zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t und $t+1$ darf sich die Amplitude des Eingangssignals betragsmäßig nicht mehr als um S ändern.

Formulieren Sie das obige Problem als Optimierungsproblem.

Hinweis: Verwenden Sie für die Zielfunktion die kompakte Matrix-Vektorschreibweise aus Aufgabenstellung **a)** und eine entsprechend der Aufgabenstellung passende Vektornorm.

c) Transformieren sie das Optimierungsproblem aus **b)** in ein lineares Programm.

Aufgabe 2. Gegeben sei das unten dargestellte MIMO-System. Das eingangsseitige Datensymbol x soll ausgangsseitig möglichst gut durch \hat{x} rekonstruiert werden. Ziel der Aufgabe ist es, hierfür die optimalen, linearen Sende- und Empfangsvektoren \mathbf{b} bzw. \mathbf{a} zu bestimmen.

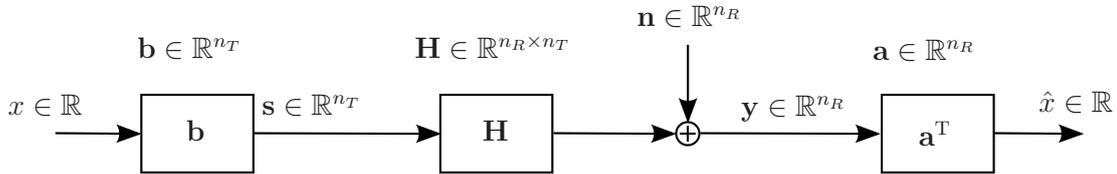


Figure 1: MIMO-System

Für die gesamte Aufgabe werden folgende Annahmen gemacht: Es gibt keine Unterscheidung bezüglich der Groß- und Kleinschreibung der Zufallsgrößen x und \mathbf{n} und deren Realisierung. Das mittelwertfreie Datensymbol ist normiert auf $E[x^2] = 1$. Für die additive Störung gilt $\mathbf{n} \sim N_{n_R}(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{n}})$. Die Kanalmatrix \mathbf{H} sei fest und bei Sender und Empfänger bekannt.

- Geben Sie \hat{x} in Abhängigkeit vom Eingangssymbol x und dem Störterm \mathbf{n} an.
- Das Sendesymbol \mathbf{s} unterliege einer Leistungsbeschränkung $E[\mathbf{s}'\mathbf{s}] \leq P_T$. Zeigen Sie, dass diese Leistungsbeschränkung ausschließlich in Abhängigkeit vom Sendevektor \mathbf{b} formuliert werden kann.

Zur Rekonstruktion von \hat{x} soll der mittlere quadratische Fehler (mean square error)

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= E[(x - \hat{x})^2] \\ &= \mathbf{a}'(\mathbf{H}\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{H}' + \Sigma_{\mathbf{n}})\mathbf{a} + 1 - \mathbf{a}'\mathbf{H}\mathbf{b} - \mathbf{b}'\mathbf{H}'\mathbf{a}. \end{aligned}$$

bezüglich des Sendevektors \mathbf{b} und des Empfangsvektors \mathbf{a} minimiert werden. Das allgemeine Optimierungsproblem lautet für diesen Fall

$$\begin{aligned} &\underset{\mathbf{a}, \mathbf{b}}{\text{minimize}} && \text{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &\text{subject to} && \text{tr}(\mathbf{b}\mathbf{b}') \leq P_T. \end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass dieses Problem durch hierarchische Optimierung getrennt gelöst werden kann. Es soll daher zuerst ein optimaler Empfangsvektor \mathbf{a}_o als Lösung von

$$\underset{\mathbf{a}}{\text{minimize}} \text{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

bestimmt werden.

- Bestimmen Sie einen optimalen Empfangsvektor \mathbf{a}_o , der $\text{MSE}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ minimiert. Gehen Sie dabei davon aus, dass der Vektor \mathbf{b} fest ist. Sie können weiterhin die beiden folgenden Beziehungen ohne Beweis benutzen

$$\frac{\partial \mathbf{c}'\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c}, \quad \frac{\partial \mathbf{x}'\mathbf{D}\mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{D} + \mathbf{D}')\mathbf{x}.$$

- Zeigen Sie, dass obiges Optimierungsproblem ein konvexes Optimierungsproblem ist. Verwenden Sie hierfür die folgende Beziehung zwischen einer konvexen Funktion f und ihrer Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\mathbf{x})$

$$f(\mathbf{x}) \text{ ist konvex} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}.$$

e) Zeigen Sie mit Hilfe der Beziehung

$$\left(\mathbf{H}\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{H}' + \Sigma_{\mathbf{n}}\right)^{-1} \mathbf{H}\mathbf{b} = \Sigma_{\mathbf{n}}^{-1} \mathbf{H}\mathbf{b} \frac{1}{1 + \mathbf{b}'\mathbf{H}'\Sigma_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b}}$$

die Gültigkeit von

$$\text{MSE}(\mathbf{b}) := \text{MSE}(\mathbf{a}_o, \mathbf{b}) = \frac{1}{1 + \mathbf{b}'\mathbf{H}'\Sigma_{\mathbf{n}}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{b}}.$$

Im Folgenden soll ein optimaler Sendevektor \mathbf{b}_o bestimmt werden. Hierfür ist das verbleibende Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{b}}{\text{minimize}} && \text{MSE}(\mathbf{b}) \\ & \text{subject to} && \text{tr}(\mathbf{b}\mathbf{b}') \leq P_T \end{aligned}$$

zu lösen. Aus der Matrix-Analysis ist das sogenannte Rayleigh-Ritz-Theorem bekannt. Dieses besagt, dass für eine hermitesche Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) = \underset{\mathbf{x}}{\text{maximize}} \quad \mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad \mathbf{x}^* \mathbf{x} = 1,$$

wobei $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ der maximale Eigenwert der Matrix \mathbf{A} ist.

- f) Finden Sie unter Berücksichtigung des Rayleigh-Ritz-Theorems einen optimalen Sendevektor \mathbf{b}_o . Sie können dabei davon ausgehen, dass die Leistungsbeschränkung mit Gleichheit erfüllt wird.
- g) Erklären Sie das Ergebnis aus f).