

2. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Gholamreza Alirezaei, Christoph Schmitz
25.04.2013

Aufgabe 1.

a) Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}).$$

b) Es sei $\mathbf{X} : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Zufallsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$E(\text{tr}(\mathbf{X})) = \text{tr}(E(\mathbf{X})).$$

Aufgabe 2. Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen zwei reellwertigen, absolut-stetigen Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f bzw. g ist gegeben durch

$$D(f||g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz für die Dichten von

a) $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$

b) $X \sim N(0, \sigma_1^2)$ und $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$.

Ist die Kullback-Leibler-Distanz *symmetrisch*, d.h. gilt $D(f||g) = D(g||f)$?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie $I(X, Y)$, $H(X|Y)$, und $H(Y|X)$ für

$$(X, Y) \sim N_2 \left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

mit $-1 < \rho < 1$.