6. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. R. Mathar, F. Altenbach, G. Alirezaei, C. Schmitz

06.06.2013

Aufgabe 1. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei positiv definite hermitesche $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass die Implikation

$$\mathbf{A} > \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|$$

gilt.
Hinweis: Der Ausdruck $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ ist eine Kurzschreibweise für: "die Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ ist positiv definit".

Aufgabe 2. Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine positiv definite hermitesche Matrix. Zeigen Sie die Gültigkeit der Hadamard-Ungleichung

$$|\mathbf{A}| \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Hinweis: Definieren Sie einen Zufallsvektor $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A})$ und verwenden Sie die Eigenschaft $\mathrm{H}(Y|Z) \leq \mathrm{H}(Y)$ der differentiellen Entropie sowie die Kettenregel

$$\mathrm{H}(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(Y_i | Y_1, \ldots, Y_{i-1}).$$

Aufgabe 3. Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ komplexwertige Matrizen. Zeigen Sie, dass die Identität

$$\det(\mathbf{I_m} + \mathbf{AB}) = \det(\mathbf{I_n} + \mathbf{BA})$$

gilt. Dabei bezeichnen $\mathbf{I_m}$ und $\mathbf{I_n}$ jeweils die $m \times m$- bzw. $n \times n$-Einheitsmatrizen.

Hinweis: Für die Determinante einer $(m+n) \times (m+n)$ Matrix $\mathbf{H}$ mit

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{C}^{n \times m} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

gilt

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{C}) \cdot \det(\mathbf{F} - \mathbf{E}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}).$$