9. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Gholamreza Alirezaei, Christoph Schmitz

04.07.2013

Aufgabe 1. Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Welche der folgenden Mengen sind konvex (Begründung erforderlich)?

a) $\mathcal{C}_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0, x_3 \le 3\}$

b) $\mathcal{C}_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, \|\mathbf{x}\|_2 \le 1\} \cap \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$

c) $\mathcal{C}_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i^2 = 1, i = 1, \dots, n\}$

d) $\mathcal{C}_4 = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} \,|\, \mathbf{X} = \mathbf{X}^T, \mathbf{X} \succ 0\}$

Aufgabe 2. Ziel in einem Ratenzuweisungsproblem ist es, die Gesamtrate zu maximieren und dabei den Leistungsverbrauch auf einen Wert von 25W zu begrenzen. Dafür stehen vier verschiedene Algorithmen zur Verfügung (siehe Tabelle).

Algorithmus	Gesamtrate	Leistungsverbrauch
A	8	20W
B	9	20W
C	9	25W
D	12	29W

Entscheiden Sie, welche der unten aufgeführten Aussagen zutreffen und begründen Sie kurz die Entscheidung.

a) Algorithmus A ist optimal.

b) Algorithmus B ist besser als Algorithmus C.

c) Algorithmus D ist besser als Algorithmus B.

Aufgabe 3. Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} & x_1^2 \\ \text{subject to} & x_1 \leq -1,\ x_1^2 + x_2^2 \geq 2 \end{array}$$

a) Zeigen oder widerlegen Sie, ob $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{\mathrm{e}^{\pi}} \end{bmatrix}$ eine Lösung des Problems ist.

b) Wie lautet der optimale Lösungswert?

c) Zeigen oder widerlegen Sie, ob das obige Problem konvex ist.

Aufgabe 4. Eine Funktion f ist konvex genau dann, wenn ihr Definitionsbereich $\mathbf{dom} f$ eine konvexe Menge ist und für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{dom} f$ die zweite Ableitung größer gleich Null ist, d.h. es gilt

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \geq 0.$$

Zeigen oder widerlegen Sie die Konvexität der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x \log x$, $\mathbf{dom} f = \mathbb{R}_{++}$

b) $f(x) = \cosh(x) = 1/2 \cdot (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, $\mathbf{dom} f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 1/x^2$, $\mathbf{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}$

d) $f(x) = \log(a + b + x) - \log(a + x)$, mit $a, b > 0$ und $\mathbf{dom} f = \mathbb{R}_{++}$