5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

13.05.2014

Aufgabe 1. Für die Datenübertragung von einem Server zu einem Clientrechner stehen drei parallele Leitungen zur Verfügung. Da die Leitungen in einem Kabelkanal verlegt sind, ist das normalverteilte additive Rauschen $\mathbf{Z}$ auf den Leitungen korreliert und besitzt die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{\Sigma_Z} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 23 & -1 & -10 \\ -1 & 23 & -10 \\ -10 & -10 & 32 \end{pmatrix}.$$

Der Server kann mit einer maximalen Sendeleistung L senden, wobei die Leistung beliebig auf die Leitungen verteilt werden kann.

Hinweis: Die Eigenwerte von $\mathbf{\Sigma_Z}$ sind $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 7$.

a) Wie groß ist die Kapazität des aus den drei Leitungen bestehenden Kanals für die konkreten Werte $L = 6$ und $L = 8$?

b) Für welche Inputverteilungen werden die Kapazitäten aus **a)** angenommen?

c) Betrachten Sie die Leitungen nun als drei unabhängige reelle Gaußkanäle mit Leistungsbeschränkung $L' = 2$ auf jeder Leitung. Wie groß ist die Gesamtkapazität für den Fall, dass

- die Korrelationen zwischen den Kanälen vernachlässigt werden, bzw.
- die Rauschleistungen durch die Eigenwerte der Kovarianzmatrix gegeben sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 2. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei positiv definite hermitesche $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass die Implikation

$$\mathbf{A} > \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|$$

gilt.

Hinweis: Der Ausdruck $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ ist eine Kurzschreibweise für: "die Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ ist positiv definit".

Aufgabe 3. Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine positiv definite hermitesche Matrix. Zeigen Sie die Gültigkeit der Hadamard-Ungleichung

$$|\mathbf{A}| \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Hinweis: Definieren Sie einen Zufallsvektor $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A})$ und verwenden Sie die Eigenschaft $\mathrm{H}(Y|Z) \leq \mathrm{H}(Y)$ der differentiellen Entropie sowie die Kettenregel

$$\mathrm{H}(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(Y_i | Y_1, \ldots, Y_{i-1}).$$