

6. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

20.05.2014

Aufgabe 1. Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ komplexwertige Matrizen. Zeigen Sie, dass die Identität

$$\det(\mathbf{I}_m + \mathbf{AB}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{BA})$$

gilt. Dabei bezeichnen \mathbf{I}_m und \mathbf{I}_n jeweils die $m \times m$ - bzw. $n \times n$ -Einheitsmatrizen.

Hinweis: Für die Determinante einer $(m+n) \times (m+n)$ Matrix \mathbf{H} mit

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{C}^{n \times m} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

gilt

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{C}) \cdot \det(\mathbf{F} - \mathbf{EC}^{-1}\mathbf{D}).$$

Aufgabe 2. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit vier Empfangsantennen und drei Sendeantennen. Die Leistungsbeschränkung betrage $L = 32$. Für die additive Störung gelte $\mathbf{Z} \sim \text{SCN}(0, 110 \cdot \mathbf{I}_4)$. Die Kanalmatrix \mathbf{H} sei gegeben durch

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{10} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und benutzen Sie dabei den natürlichen Logarithmus.
- Geben Sie die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} an, so dass für die Eingabe $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(0, \mathbf{Q})$ die Kapazität des Kanals angenommen wird.

Aufgabe 3. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit einer Empfangsantenne, drei Sendeantennen und Leistungsbeschränkung $L = 20$. Für die additive Störung gelte $\mathbf{Z} \sim \text{SCN}(0, 42)$. Die Pfadgewinne seien $h_{11} = 5$, $h_{12} = 1$ und $h_{13} = 4$.

Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und die kapazitätserreichende Eingangsverteilung.