11. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

01.07.2014

Aufgabe 1. Die l_p-Vektornorm eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1\,.$$

Zwei wichtige Spezialfälle sind die l_1- und die l_∞-Vektornorm, gegeben durch

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \text{und} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\,.$$

Formulieren Sie die folgenden Optimierungsprobleme mit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ als lineare Programme

a) $\underset{\mathbf{x}}{\text{minimiere}}\, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 \quad \text{so dass} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1.$

b) $\underset{\mathbf{x}}{\text{minimiere}}\, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_\infty \quad \text{so dass} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1.$

c) $\underset{\mathbf{x}}{\text{minimiere}}\, \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_1 + \|\mathbf{x}\|_\infty.$

Hinweis: Das Optimierungsproblem

$$\underset{\mathbf{x}}{\text{minimiere}}\, f(\mathbf{x})$$

lässt sich mit $t \in \mathbb{R}$ äquivalent umschreiben zu

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{x},t}{\text{minimiere}} & t \\ \text{so dass} & f(\mathbf{x}) \leq t\,. \end{array}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 2.

a) Ein lineares, zeitdiskretes SISO-System werde durch die Beziehung

$$y(t) = \sum_{i=0}^{t} h_i u(t-i)$$

beschrieben, wobei $t \in \mathbb{Z}$ ist. Für die weiteren Größen gilt:

- Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ mit $u(t) = 0$ für $t < 0$
- Ausgangssignal $y(t) \in \mathbb{R}$
- FIR Kanalkoeffizienten $h_i \in \mathbb{R}$ (bekannt) mit $h_i = 0$ für $i > N$

Geben Sie für die Abtastzeitpunkte $0 \leq t \leq N$ die Beziehung zwischen Ein- und Ausgangssignal in einer kompakten Matrix-Vektorschreibweise an.

b) Das Ausgangssignal $y(t)$ soll nun näherungsweise einem vorgegebenen Signal $y_{\text{ziel}}(t)$ folgen können. Hierfür ist die betragsmäßig maximale Abweichung der Differenz $e(t) = y(t) - y_{\text{ziel}}(t)$ für die Zeitpunkte $0 \leq t \leq N$ möglichst klein zu halten

$$\max_{0 \leq t \leq N} |e(t)| \rightarrow \min .$$

Um dieses Ziel zu erreichen, soll jetzt eine Steuerung für das Eingangssignal $u(t)$ entworfen werden. Dabei sind die folgenden technischen Spezifikationen zu beachten.

- Das Eingangssignal darf nur für die Zeitpunkte $0 \leq t \leq M$ gesteuert werden. Für Zeitpunkte $M < t \leq N$ muss das Eingangssignal Null sein.
- Die betragsmäßig maximale Amplitude des Eingangssignals darf den Wert U nicht überschreiten.
- Zwischen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t und $t+1$ darf sich die Amplitude des Eingangssignals betragsmäßig nicht mehr als um S ändern.

Formulieren Sie das obige Problem als Optimierungsproblem.

Hinweis: Verwenden Sie für die Zielfunktion die kompakte Matrix-Vektorschreibweise aus Aufgabenstellung **a)** und eine entsprechend der Aufgabenstellung passende Vektornorm.

c) Transformieren sie das Optimierungsproblem aus **b)** in ein lineares Programm.