3. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

29.04.2015

Aufgabe 1. Ein Übertragungssystem sei gegeben durch

$$Y = X + Z\,.$$

Die Eingabe X nehme die Werte $x_1 = A$ und $x_2 = -A$ jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ an, für den Rauschterm Z gelte $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Die Zufallsvariablen X und Z seien stochastisch unabhängig. Leiten Sie die Transinformation zwischen X und Y her, indem Sie wie folgt vorgehen.

a) Zeigen Sie

$$f_{Y|X}(y|X = x) = f_Z(y - x)\,.$$

b) Zeigen Sie

$$\mathrm{H}(Y|X) = \mathrm{H}(Z)\,.$$

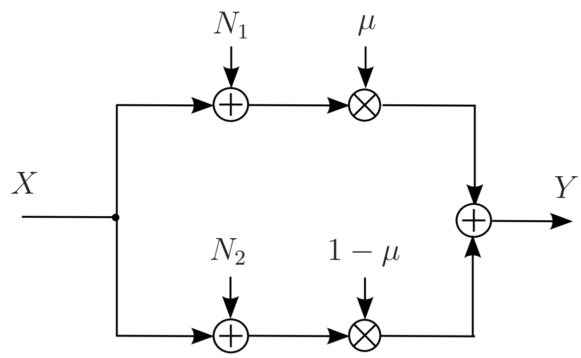
c) Berechnen Sie die Dichte f_Y in Abhängigkeit von f_Z.

d) Nun sei $\varphi_i = f_Z(y - x_i)$. Zeigen Sie

$$\mathrm{I}(X;Y) = \mathrm{D}\left(\varphi_1 \,\middle\|\, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \varphi_i\right)\,.$$

e) Betten Sie die Aufgabe in Beispiel 4.1.1 der Vorlesung ein und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2. Gegeben sei der folgende reellwertige Kanal:



Das Eingangssignal X unterliege der Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}(X^2) \leq 4$ und habe den Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = 0$. Die additiven Rauschterme N_1 und N_2 seien normalverteilt mit $N_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$ und $N_2 \sim \mathrm{N}(0,2)$. Das Eingangssignal X und die beiden Rauschterme N_1 und N_2 seien gemeinsam stochastisch unabhängig. Für den Parameter μ gelte $0 \leq \mu \leq 1$. Die Zufallsvariable Y repräsentiere das Ausgangssignal.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

a) Es sei zunächst $\mu = 1$. Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.

b) Der Parameter μ liege nun wieder im Intervall $[0,1]$. Berechnen Sie die Kapazität in Abhängigkeit von μ.

c) Für welchen Wert μ wird die Kapazität maximal? Wie lautet die Kapazität in diesem Fall?

d) Die Kanaleingabe werde nun durch die skalierte Zufallsvariable $X' = \alpha X$ mit $\alpha > 0$ ersetzt. Wie verändert sich die Kapazität des Kanals?