Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz

05.08.2015

Aufgabe 1. Die Gesamtaufgabe besteht aus **zwei** Teilen, die **unabhängig** voneinander gelöst werden können.

Teil I

Für die absolut-stetige Zufallsvariable X mit Träger $[0, \infty)$ und festem Parameter $\alpha > 0$ gelte

$$P(X > x) = (\beta + \alpha x)^{-\frac{1}{\alpha}} \, .$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X. Wählen Sie dazu den Parameter β so, dass F_X die Voraussetzungen einer Verteilungsfunktion erfüllt und berechnen Sie die zugehörige Dichtefunktion f_X.

Nun sei $T(X) = (1 + \alpha X)^{-\frac{1}{\alpha}} =: Y$.

b) Geben Sie den Wertebereich der Zufallsvariablen Y an.

c) Bestimmen Sie unter Verwendung des Transformationssatzes die Verteilungsdichte von Y. Gehen Sie davon aus, dass die Voraussetzungen des Transformationssatzes erfüllt sind.

Teil II

Jetzt werde die exponentialverteilte Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \, \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x) \, , \quad \lambda > 0 \, ,$$

betrachtet.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = e^{itX}$ als Funktion von $t \in \mathbb{R}$, wobei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit bezeichnet.

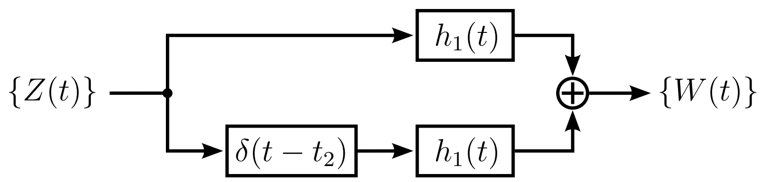
Aufgabe 2. Es sei $\{X(t)\}$ ein stochastischer Prozess mit $X(t) = \cos(2\pi f_0 t + \Phi)$, wobei Φ auf $[0, 2\pi]$ gleichverteilt ist, d.h. $\Phi \sim \mathrm{R}(0, 2\pi)$.

a) Zeigen Sie, dass $X(t)$ ein schwach stationärer Prozess ist.
Hinweis: Es gilt $\cos(x+a)\cos(x+b) = \cos(2x+a+b) + \cos(a-b)$.

b) Es sei $\{Y(t)\}$ Gaußsches weißes Rauschen mit $\mathrm{E}(Y(t)) = 0$ und $R_{YY}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$. Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $Z(t) = X(t) + Y(t)$ ebenfalls schwach stationär ist. Gehen Sie davon aus, dass $\{X(t)\}$ und $\{Y(t)\}$ stochastisch unabhängig sind.

c) Das Leistungsdichtespektrum von $\{X(t)\}$ lautet $S_{XX}(f) = \frac{1}{2}(\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0))$. Bestimmen Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{ZZ}(f)$ des Prozesses $\{Z(t)\}$.

Nun sei folgendes LTI-System gegeben:



Dabei sei $h_1(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}\, \mathbb{I}_{[0,\infty)}(t)$ mit der Zeitkonstanten $T > 0$. Für den Parameter t_2 gelte zunächst $t_2 \geq 0$.

d) Geben Sie die Impulsantwort $h(t)$ des Gesamtsystems an und berechnen Sie die Fouriertransformierte $H(f)$.

e) Es sei nun $t_2 = 0$. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum des Ausgangsprozesses $S_{WW}(f)$ für diesen Fall.

Hinweis: Für die Fouriertransformierte $G(f)$ einer Funktion $g(t)$ gilt:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi f t} \mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 3. Gegeben sei eine diskrete gedächtnislose Quelle X mit Quellalphabet $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den Logarithmus zur Basis zwei.

a) Gehen Sie zunächst davon aus, dass die Symbole gleichverteilt sind. Bestimmen Sie für diesen Fall die Entropie $\mathrm{H}(X)$ der Quelle.

Nun sei die zugehörige Zähldichte der Quelle X gegeben als $P(X = x_1) = 0.6$ und $P(X = x_2) = P(X = x_3) = 0.2$.

b) Berechnen Sie die Entropie der Quelle $\mathrm{H}(X)$ und bestimmen Sie die erwartete Kodewortlänge $\bar{n}(g_1)$ des Huffman-Kodes der Blocklänge $N = 1$.

c) Konstruieren Sie nun einen Huffman-Kode g_2 für die in unten stehender Tabelle aufgelisteten Symbolpaare. Berechnen Sie anschließend die erwartete Kodewortlänge $\bar{n}(g_2)$ pro Symbolpaar. Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe folgende Tabelle:

Bezeichner	Symbolpaar	p_i	Kodewort	Wortlänge
A_1	(x_1, x_1)			
A_2	(x_1, x_2)			
A_3	(x_2, x_1)			
A_4	(x_1, x_3)			
A_5	(x_3, x_1)			
A_6	(x_2, x_2)			
A_7	(x_2, x_3)			
A_8	(x_3, x_2)			
A_9	(x_3, x_3)			

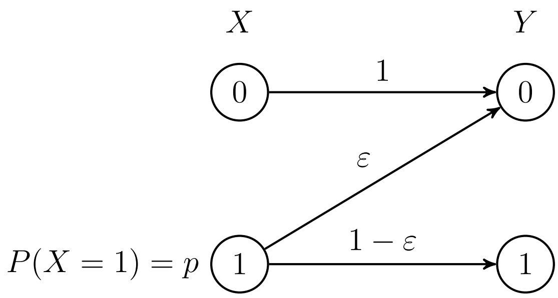
d) Die Symbole der Quelle X werden nun vorverarbeitet und mit der folgenden Funktion in ein neues Alphabet $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ abgebildet. Dabei gilt $x_1 \to y_2$, $x_2 \to y_3$ und $x_3 \to y_1$. Die resultierende Quelle werde mit Y bezeichnet. Es sei g_Y ein optimaler präfixfreier Kode für Symbole der Blocklänge $N = 2$. Geben Sie eine Beziehung zwischen den erwarteten Wortlängen $\bar{n}(g_Y)$ und $\bar{n}(g_2)$ an.

Betrachten Sie nun folgenden präfixfreien Kode für eine diskrete Quelle Z mit Quellalphabet $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ und zugehöriger Zähldichte $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$.

Symbol	q_i	Kodewort
z_1	0.7	1
z_2	0.05	01
z_3	0.2	000
z_4	0.05	001

e) Ist dieser Code optimal? Falls nein, wie lautet ein optimaler Code? (Begründung erforderlich!)

Aufgabe 4. Es werde der unten abgebildete *Z-Kanal* betrachtet. Der Kanal zeichne sich dadurch aus, dass der Eingangswert $X = 0$ stets korrekt über den Kanal übertragen wird, während der Eingangswert $X = 1$ mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit ε fälschlicherweise auf den Ausgangswert $Y = 0$ abgebildet wird. Die Wahrscheinlichkeit $P(X = 1)$ werde einfachheitshalber mit p bezeichnet.



Bei einer experimentellen Messung beobachtet man nun am Ausgang des Kanals die Auftrittswahrscheinlichkeit $P(Y = 1) = \frac{1}{3}$.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den Logarithmus zur Basis zwei.

a) Bestimmen Sie die Zähldichte von X in Abhängigkeit von ε.

b) Geben Sie den gültigen Wertebereich für die Fehlerwahrscheinlichkeit ε an. Welchen Wert hatte ε während des Experiments, wenn zusätzlich bekannt ist, dass die Eingangssymbole gleichverteilt waren.

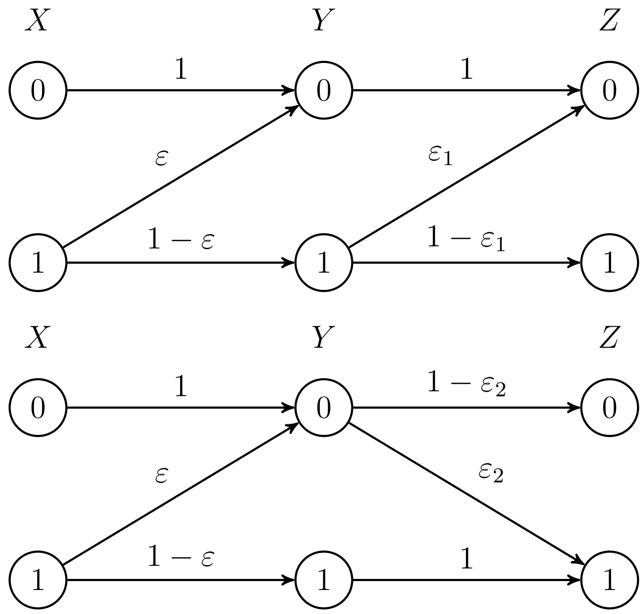
Die Zähldichten von X und Y seien nun wieder unbestimmt.

c) Bestimmen Sie ohne Rechnung die Kapazität des Kanals im Falle $\varepsilon = 1$ und erläutern Sie ihr Ergebnis.

d) Es sei nun $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie für diesen Fall die Transinformation $\mathrm{I}(X;Y)$ in Abhängigkeit von p.

Nun werden die beiden verketteten Kanäle auf der folgenden Seite betrachtet. Die Parameter ε_1 und ε_2 können dabei stets Werte aus dem offenen Intervall $(0, 1)$ annehmen.

e) Entscheiden Sie jeweils, ob sich der Kanal als äquivalenter *binärer symmetrischer Kanal* (BSC) darstellen lässt. Geben Sie, soweit möglich, den Wert von ε_1 bzw. ε_2 in Abhängigkeit von ε an.



X
Y
Z
0
1
ε
$1-\varepsilon$
ε_1
$1-\varepsilon_1$
X
Y
Z
0
1
ε
$1-\varepsilon$
$1-\varepsilon_2$
ε_2