Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 1

Montag, 18. April 2016

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die differentielle Entropie der folgenden absolut-stetigen Zufallsvariablen:

a) X ist gleichverteilt auf dem Intervall $[a, b]$, $b > a$, d.h.

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{I}_{[a,b]}(x)\,.$$

b) X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,,\ \ x \geq 0\,.$$

c) X ist Laplace-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h.

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

d) X ist die Summe der stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen $Y \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $Z \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Aufgabe 2. Es sei $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ ein absolut-stetiger Zufallsvektor mit Dichte $f_{\boldsymbol{X}}$. Des Weiteren seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{b}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{X}) + \log|\boldsymbol{A}|\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Transformationssatz für die lineare Abbildung $T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{b}$.

Aufgabe 3. Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen zwei reellwertigen, absolut-stetigen Zufallsvariablen X und Y mit Dichten f bzw. g ist gegeben durch

$$\mathrm{D}(f \parallel g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log\frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x\,.$$

Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz zwischen den Zufallsvariablen X und Y für

a) $X \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$,

b) $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$.

Ist die Kullback-Leibler-Distanz symmetrisch, d.h. gilt $\mathrm{D}(f \parallel g) = \mathrm{D}(g \parallel f)$?